



L'infini dans l'univers des nombres

Übung 0.

- 1) Beschreibe Ohne-Ende-Fresserchen.
- 2) Ohne-Ende-Fresserchen spielt mit \mathbb{R} . Ein anderes Monster will das gleiche Spiel mit dir spielen. Wie heißt dieses Monster?
- 3) Wie viele Ziffern haben die Nachkommastellen einer Dezimalzahl?
- 4) Was frisst Ohne-Ende-Fresserchen?
- 5) Welche natürliche Zahl ist $0,999999 \dots$?
- 6) Hilberts Hotel ist ausgebucht. Glaubst du, dass du ein freies Zimmer bekommst?

Exercice 1.

- 1) Es-tu capable d'imaginer un nombre s'écrivant avec 100 chiffres, ou bien 1000 chiffres, ou avec un nombre entier n de chiffres ? Explique.
- 2) Par tes connaissances, ou à l'aide d'un autre panneau de l'exposition, trouve une façon simple d'écrire des exemples de très grands nombres entiers.

Exercice 2.

- 1) Pose la division de 1 par 3. Que remarques-tu ?
- 2) Quelle est l'écriture décimale de $1/3$? Où apparaît l'infini dans cette écriture ?
- 3) Détermine l'écriture décimale du nombre $1/7$. Repère ce qui se répète une infinité de fois dans cette écriture.

Exercice 3.

- 1) Donne un exemple de nombre compris entre 0,99 et 1.
- 2) Donne un exemple de nombre compris entre 0,9999999999 et 1.
- 3) Peux-tu trouver un nombre compris entre 0,99999... (le 9 est répété une infinité de fois) et 1 ?
- 4) Place les deux nombres 0,99999... (le 9 est répété une infinité de fois) et 1 sur une droite graduée. Qu'en déduis-tu ?

Exercice 4.

Pour les questions de cet exercice, on admet que l'on peut faire "comme d'habitude" les additions et les multiplications avec des nombres possédant une infinité de chiffres après la virgule.

- 1) a) Calcule $3 \times 0,33333 \dots$
- b) Ecris $0,33333 \dots$ sous la forme d'une fraction (on peut s'aider de l'exercice 2).
- c) Déduis-en que $0,99999 \dots = 1$.

2) Le but de cette question est de découvrir quelle est la fraction dont l'écriture décimale est $0,2666 \dots$

- a) Calcule $10 \times 0,26666 \dots$
- b) Calcule $10 \times 0,26666 \dots - 2$
- c) Vérifie que $0,666 \dots = 2/3$
- d) Résous l'équation où x est l'inconnu :

$$10x - 2 = \frac{2}{3}$$

On donnera la solution sous la forme d'une fraction simplifiée.

- e) Déduis-en la fraction égale à $0,2666 \dots$

Exercice 5. Matériel nécessaire : calculatrice

- 1) En t'aidant du kakémono, trouve les termes manquants (marqués par un point d'interrogation) dans cette égalité :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ? + ? + ? + \dots$$

- 2) Vérifie que les dénominateurs apparaissant dans toutes ces fractions (irréductibles) sont des puissances de 2.

3) A l'aide de la calculatrice, calcule la somme des dix premiers termes apparaissant dans la somme infinie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ? + ? + ? + \dots$$

Compare avec le nombre 1.

Exercice 6.

1) On souhaite mettre en relation les entiers impairs avec les entiers naturels. Complète :

Entiers impairs	1	3	5	?	?	?	17	19	101
Entiers	0	1	2	3	4	5	?	?	?

Y a-t-il autant d'entiers impairs que de nombres entiers naturels ? Trouves-tu cela perturbant ?

2) De la même façon, complète le tableau suivant afin de mettre en relation les entiers relatifs avec les entiers naturels.

Si l'entier est pair, alors... Si l'entier est impair, alors...	Entiers relatifs	0	1	-1	2	-2	3	-3	?	?
	Entiers naturels	0	1	2	3	4	5	?	?	?

Si l'entier est positif, alors...

Si l'entier est négatif, alors...

Y a-t-il autant d'entiers relatifs que de nombres entiers naturels ? Trouves-tu cela perturbant ?